INSTITUT COMMERCIAL DE NANCY 1979

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Texte : 3 pages

1er problème

On désigne par :

- E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3
- $B = (e_1 , e_2 , e_3)$ une base de E
- $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, d'élément neutre 0 et d'élément unité I
- U un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ différent de 0 et de I
- φ_U l'application $f_U \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & U.X - X.U \end{array} \right.$

I - Démontrer que φ_U est un endomorphisme non bijectif.

II - On suppose qu'il existe 3 nombres réels λ_1, λ_2, λ_3, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que

$$U = P . \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} . P^{-1}$$

1. Pour $(i, j) \in \{ 1, 2, 3 \}^2$ on pose $N_{ij} = P . M_{ij} . P^{-1}$ où M_{ij} est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formée de 0 sauf l'élément de la $i^{ième}$ ligne et $j^{ième}$ colonne qui vaut 1.

   Démontrer que $(N_{ij})_{(i, j) \in \{ 1, 2, 3 \}^2}$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. Calculer $\varphi_U (N_{ij})$

   Donner une base de $\operatorname{Im} \varphi_U$ et de $\operatorname{Ker} \varphi_U$

   Dans le cas où les nombres λ_1, λ_2, λ_3 sont distincts deux à deux, donner l'expression générale des matrices de $\operatorname{Im} \varphi_U$ en fonction de P et de P^{-1}

3. Soit f un endomorphisme de E de matrice $M = (a_{ij})$ dans la base B.

   On suppose que a_{13} , $a_{23} \neq 0$ et que $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$

   pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on pose $e'_1 = e_1 + \alpha e_3$, $e'_2 = e_2 + \beta e_3$ et $e'_3 = e_3$

   Démontrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E

   Démontrer qu'on peut choisir α et β tel que la matrice de f dans la base B' soit $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & h & 0 \end{pmatrix}$

   Déduire des questions précédentes qu'il existe deux endomorphismes de E g et h tel que f = goh - hog

2è problème

Pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par E_n l'ensemble des fonctions f définies et deux fois dérivables sur $[0 , + \infty [$ vérifiant

$$\forall x \in [0, + \infty [\qquad 4 x f'' (x) + (2 - 4n) f' (x) + f (x) = 0$$

I - Soit la fonction h définie par $h (x) = \cos \sqrt{x}$

1. Etudier les variations de h .

   Construire la courbe représentative de h sur $[0, 4 \pi^2]$

2. Démontrer que $h \in E_0$.

II - Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère une suite g_n de fonctions définies sur $[0, + \infty [$ par

$$\begin{cases} g_0 \in E_0 \\ g_n (x) = \displaystyle\int_0^x g_{n-1} (t)\, dt + (4n - 2)\, g_{n-1}(0) \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. a) Démontrer que $g_n \in E_n$

   b) Déterminer pour $n \geqslant 2$ la relation existant entre g_{n-2}, g_{n-1} et g_n .

2) On suppose $g_0 = h$

   a) Calculer g_1

   b) Démontrer qu'il existe 2 suites de fonctions polynômes P_n et Q_n tel que :

$$\forall x \in [0, + \infty [\qquad g_n (x) = P_n (\sqrt{x}) \cos \sqrt{x} + Q_n (\sqrt{x}) \sin \sqrt{x}$$

   Donner les relations de récurrence permettant de calculer P_n et Q_n

   Application : calculer g_2

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail